京都帝國大學經濟學會

經濟論叢

第四十五巻　第五號

昭和十二年十一月一日發行

大正四年六月二十一日第三種郵便物認可（毎月一回一日發行）

論叢

時論

研究

說苑

附錄

エッヂワースと誤差の問題

馬場吉行

一　はしがき

エッヂワースは「統計學の方法」[1]に於て、統計學を規定して社會科學の領域に於ける「平均の學問」(Science of means) と言ひ、又レキシスの語を借り「集團現象の學問」(Science of "Massenerscheinungen") となしてゐる。そして物理觀測法とも關係を有するものとしてゐる。右に平均と言つたのは單に一個の値をさすものではなく、與へられた系列を通して知らんとする集團の集團性を總括的に表現したのであり、從つて系列に即して言へば、その代表値とそれよりの偏差の分布を同時に考察することになる。

しからば平均の學問に於ける主要問題は何かと言ふに、[2] これは二つに大別される。(一)は提出された諸平均の差違が偶然的なものか、又は一の法則を示してゐるかを見出すことであり、(二)は最良の平均を見出すことであるとする。そしてこれらの問題を攻究するに際して、數學的確率論から生れた誤差法則 (the Law of Error) を採用する。

右の如く、彼に於ては平均並びに誤差法則の觀念が彼の統計學に於ける諸研究を貫く中心的なものと考へ得る。然らば彼は誤差法則を如何に觀じたか、更に進んで誤差法則の根基をなす誤差 (Error) を如何に解したであらう

1) Edgeworth, F. Y., Methods of Statistics (Journal of the Royal Statistical Society, Jubilee Volume), 1885, p. 182.
2) Edgeworth, ibid., p. 182.

か。以下私は主として Encyclopaedia Britannica (11th edition) 所載の彼の「確率論」(Probability) に據りこれらの點を考察したいと思ふ。

二　誤差法則の意義

エッヂワースは彼の「確率論」を二部に分ち、第一部に於ては確率及び期望値を、第二部に於ては平均と誤差諸法則 (Averages and Laws of Error) を論じてゐる。この區分に關して彼は次の如くに述べてゐる。[1]

「平均と誤差（平均からの偏差）との理論は確率論の他の部分から切り離されてゐるが、これはその方法が特殊な困難さを帶びるからである。ラプラス及びガウスに依つて考案された方法も未だ完成されず、全く安全になつたとは言へない。次にこれらはその應用の重要性からも切り離して論ぜられるわけである。即ち誤差の理論は物理學者には互ひに喰ひ違ふ諸觀測値を結合して最もよい測定（結果）を得せしめる。統計學者には標本 (Samples) の使用によりその勞を省かせ、歸納の正當性の吟味の場合に彼を助けることもある。中でも有用なのは相關聯して變動する數量につき論理的方法を施す場合で、特に遺傳の諸法則を研究するに於て然りである。」

かくて確率論の應用として平均並びに誤差諸法則が論ぜられるが、この誤差諸法則は二つにわけられ、[2] 誤差法則 (the Law of Error) と度數諸法則 (Laws of Frequency) とされる。前者は誤差の分布を數學的に論ずる際、常に平均が中心的位置を占むるに反し、後者は必ずしも然らず、度數分布のみを數學的に考察するのである。ピアーソン學派の研究は後者に屬するが、これに對しエッヂワースはラプラス、ケトレーを傳承して前者の理論を展

1) Edgeworth, "Probability" (11 th ed., Encyc. Brit., Vol. XXII), p. 376.
2) Edgeworth, ibid., § 96, § 97.

開したのであつた。[3]

右の如く、誤差の問題には先づ平均の觀念が瞭らかにされねばならぬ。

「平均（Averages）―平均とは今一組の諸量が與へられたとき、これらから次の手順により得られる量と定義する。卽ち（一）もしも各個の値がすべて相等しくなるとき、平均も亦これらの値に合致するものとし、（二）もし各個の値に異同があれば、平均はそれらの最小値よりも大きく最大値よりも小さい。」[4] 從つてこの定義から、算術平均（相加平均）、幾何平均（相乘平均）、調和平均、中位數、並數はみなこの槪念に含まれるが、更に無數の平均を考へ得る。

次に誤差法則については次の如く說明される。[5]「平均論のうち確率と交渉するもので最も重要なのは、平均と各値との關係を取扱ふもので、通常これを誤差法則（Laws of Error）と呼ぶ。誤差は日常語としては、眞値からの偏差（deviation from truth）と定義される。さて（一物を測定したとき）各測定値は或ひは大きく或ひは小さいが、その眞値はこれらの平均（Mean）に存する。このことから誤差の學術上の用法を擴張し、各個の統計値の平均からの偏差をも入れることにする。從つてこの場合の平均は―體長とか晴雨計の讀みとかの平均（Mean）は―何等實在的客觀的事物をあらはさない。このやうに一の誤差法則（a law of error）は偏差の擴がりとそれのおこる度數（frequency）との關係をさす。……これが定まつた誤差法則（the law of error）たるものとの區別は、それが單に一種類の統計に適用せられるにとゞまらず、普遍的とはいへぬにしろ、先づ一般的にみて各種の集團の多くに適用されるやうな函數形を有するや否やによる。しかもこの區別に最も役立つ形が何であるかは、單にその用

3) Fisher, A., The mathematical Theory of Probabilities, 1922, p. 185.
4) Edgeworth, "Probability", § 95.
5) Edgeworth, ibid., § 96.

語によつては確定し得ない。即ち各學者は問題の諸點に對し必ずしも同じ重みづけをして居ない。法則の適用し得る事例の範圍、適用の精確度、各個の經驗に先だつ法則の推定が即ちこれである。そこでこゝでは誤差法則(the law of error)の語を次の如くに用ひる。「(一)普通の用法により意味される種類、(二)かゝる種類を正當づける先驗的推定を用ひ得る限りの更に廣い範圍、をあはせ示すことゝする。」

かくの如くにして誤差法則の意義は一應規定されたのであるが、われ〳〵は右のうちに幾多の重要なる問題を見出すのである。

(一) 誤差法則は元來單一物を多數回観測する場合に、その測定値系列の分布を問題とするもので、無限に多數回観測したる場合得らるべき度數分布の法則を考察する。このとき、観測の度毎に多少その測定値を異にするが故に、これらから眞値と見做し得べき値即ち most probable value (最確値)を求めることがその研究の目的となる。観測法(測定法)に於ける誤差法則の意義は右の如くであるが、これを所謂「統計的研究」に準用し得るであらうか。準用し得るとせば、その理論的基礎は何處に求めらるべきであらうか。又假りに観測法におけるとおなじ函數形が「統計的研究法」に於て採用せられるとしても、果して兩者が同一原理の上に立つや否や、外觀は同一とするも、本質に於て全く相容れないのではないか。これには兩者のよつて立つ地盤の對比が問題となる。

(二) 次に平均と誤差の意義につき考察する。観測法に於ける平均は最確値に外ならず、それは對象たる事物の眞値を示すものと考へて差支へない。そして誤差はこの最確値と各測定値との開きで即ち殘差(Residual)であるが、これも普通の意味の誤差として具體的な意味を有してゐる。これに反し「統計的研究」に於ては平均は單に系

列の代表値を與へるに過ぎず、誤差も眞の意味を失ひ、中心的なものからの開きを示すことゝなる。從つて後の場合には系列全體の構造を物語るものとして、平均並びに誤差の分布が更に重要なる意義を有することゝなる。

（三）　同一事物の多數囘觀測して得る測定値系列から最確値を求めるのが「觀測法」の問題であるが、これに對し同種事物の多數個の觀察より、その種のある屬性についての安定的結果を得るのが、個體研究に就き、一般に自然科學領域に於て行はれる集團的研究である。前に「統計的研究」と言つたのは、廣く統計解析法と、これに關聯を有する自然科學領域の集團的研究法とを一括したのであるが、その地盤をなす集團の性質が一は社會的存在たるに反し、他は意識的に構成したるに過ぎない。今われ〳〵の問題に於ては「觀測法」との關聯に於て考察せられて居る故、その基準は自然科學に於ける同種事物の多數個觀察とせられる。而して一面誤差法則の存在又は發現を考へる場合には、常にその集團の性質が顧慮されるを要する。從つて統計學に於ける誤差法則の問題は極めて複雜性を帶びて來る。

（四）　さて一般に統計的研究に於て具體的な度數分布曲線（a law of error の圖解）が先づ作られるが、これにつきある意味での平均とそれよりの誤差が與へられる。これが更に理想的度數分布法則を與へうる爲には―the law of error となるためには―各構成因子たる測定値・統計値が、如何なる假說（Hypothesis）の支配をうけるかを考察しなければならぬ。觀測法に於ける平均並びに誤差についても全く同樣である。この假說の考察が數學的確率論を用ひて誤差法則（理想的分布法則）を導き出す前提となるのである。

しかもこの誤差法則は單なる假空の數學的函數關係を表はすものではない。具體的な實在的な度數分布曲線を

基礎とし、しかも各種のかゝる曲線（函數關係）の中心的なものとして、數學的に構成されたものである。從つてこの法則を成立せしめる假說を滿足すべしと思はれる集團につき、得たる誤差法則が現實に存在する度數分布曲線の反映とみなし得るやを考察することが次の問題となる。

然らば誤差法則を示す函數には如何なるものがあるのであらうか。[6]

「誤差法則の表示の中、屢々正規法則（Normal law）と呼ばれる、最も簡單な、最もよく知られた表示は方程式 $Z=\frac{1}{\sqrt{\pi}\cdot c}e^{-(x-a)^2/c^2}$ で、もつと便利に $(1/\sqrt{\pi}\cdot c)\exp-(x-a)^2/c^2$ とも書かれる、こゝに x は測定してゐる觀測値の大さで、a は同樣な統計値の（無限にその數が增加されたと假定したときの）群の算術平均を表はす。c はこの群に固有な常數で Modulus と呼ぶこともある。この方程式の意味することは、今もしこの群の大きな數Nを任意にとると、x と $x+\Delta x$ との間にある觀測の數は（近似的に）右の方程式の右邊に $N\Delta x$ を乘じたものに等しくなると云ふのである。」これに對應する曲線は、正規曲線（Normal curve）又は確率曲線（Probability-curve）と呼ばれ、c の値の大小により曲線は低く高くなる。この c の値は、分布の狀態をあらはす重要な基本的常數である。

更に右の正規法則は單に近似的の誤差法則をあらはすにすぎずとなし、數學的に又實際的に更に精密なものを要求するものもある。「一般化した誤差法則」又は Skew curve と言はれるのは卽ちかゝるものをさすのである。[7]

三　誤差に關する假說

しからば正規法則が何故に誤差法則を與へるか。又「一般化した誤差法則」を考察する必要ありとすれば、それ

6) Edgeworth, ibid., § 98.
7) Edgeworth, ibid., § 158.

は如何なる點から爲さるべきであらうか。

既に述べた如く、誤差法則は平均並びに誤差の假說より組立てたものであるから、先づ觀測法並びに統計的研究法に於ける平均と誤差が、如何なる數量的規定を受けるものなるかにつき考察するを要する。

誤差の假說に關しては從來二つの行き方があり、一はガウス流で、他はラプラス・ケトレー流のものである。[1]

エッヂワースはこの後者を採つてゐる。[2]

「この法則（正規誤差法則）の先驗的證明の一つはハーシェル（Herschel）に依り次の如くに與へらる。『一の誤差のおこる確率は單にその大いさに依存し、その方向には依存しない』と。卽ち正の誤差、負の誤差は共に等しく起り易いとする。」そしてガウスの誤差法則を出し得ることを述べ、この提言は特別な解釋を與へない限り、一般的經驗と合致するものでないといふ。

エッヂワースは右の如くハーシェルの假說を排斥するが、この立場は所謂ガウス流の考へ方である。エッヂワースはガウスについては何等觸れてゐないが、現に觀測法に於て採用され、又「最小二乘法」はこの正規法則を基本とするものであるから、その限りに於てガウスの假說は充分意義を有する。依つて次にその所說を紹介しよう。[3]

同一物體の測定（Measurement）に於いて、測定値は、必ずしも其の物體の大いさを示す眞値（True value）とは一致しない。普通に誤差（Error）と云へば、測定値と眞値との開き卽ち（測定値－眞値）を謂ふ。併し誤差には、充分な注意をなすことにより、また其の發生原因と關係を明らかにすることにより除き得るものと、除き得ないものとがある。前者に屬する誤差に定誤差（Constant error）、過失（Mistake）があり、後者の誤差を偶然誤差（Accidental error）と謂ふ。こゝに誤差法則といふのは偶然誤差の法則を指すものである。

（偶然）誤差の法則は、算術平均の原理（Principle of arithmetical mean）と三個の公理（Axiom）の下に成立するものであ

1) Charlier, C. V. L., Die Grundzüge der mathematischen Statistik, 1920, S. 4. Walker, H. M., Studies in the History of Statistical Method, 1929, pp. 21—22. p. 39.
2) Edgeworth, ibid., § 99.
3) 蜷川虎三、統計學概論、155頁以下に依る。

る。即ち、算術平均の原理とは、直接測定 (Direct measurement) に於いて同一の信頼程度の測定を繰返へし行うて得た結果の算術平均は、眞値に對し最も確からしき値である、といふのである。測定の對象たる物體の眞値は存在するには違ひないが知り得ざる値である。それで眞値に最も近い値を求める譯であるが、此の値として算術平均を假定する。また、公理としては次の三個を規定する。

公理1 測定回數の多數の場合、同一大いさの正負の誤差は同樣に起る傾向がある。正負の誤差の數は相等しい。

公理2 小さい誤差は大きい誤差よりも多く起る傾向がある。

公理3 一聯の測定の誤差はいづれも等しい正負の誤差の限界内に起る。非常に大なる誤差は起らない。

素より算術平均と測定値との差は偶然誤差ではなく之を殘差 (Residual) といふが、偶然誤差は測定回數が無限に大となる場合に殘差の極限値と考へることが出來る。而して又其の生起の度數と總測定回數との比即ち强度 (相對的度數 Relative frequency) はかかる場合に於て其の確率と考へられるから、偶然誤差を横軸に其の確率を縱軸にとつて之を圖示すれば、縱軸に對し對稱的な曲線を得る。之を確率曲線 (Probability curve) と謂ふ。此の確率曲線の方程式が一般に誤差法則と呼ばれてゐる。

かくの如くにしてガウスの正規法則が導き出されるのであるが、この關係は同一物體の多數回觀測に於て成立するのみでなく、更に同種個體の多數個觀察の結果にも妥當するものであらうか。エッヂワースは前述の如くハーシェルの假説を排し、ラプラス (Laplace) ケトレー (Quetelet) の假説を採用した。「ハーシェルの假定は實際一般の同意を得なかつた。そして誤差法則はラプラスに依つて創められた證明に基く方がよいやうに見える」[4] とした彼は、引續きこの假説を次の如くに述べてゐる。[5]

"According to this view the normal law of error is a first approximation to the frequency with which different values are apt to be assumed by a variable magnitude dependent on a great number of independent variables, each of which assumes different values in random fashion over a limited range, according to a law of error, not in general the law, not in general the same for each variable."

4) Edgeworth, ibid., § 101. The Laplace-Quetelet Hypothesis.
5) Edgeworth, ibid., § 101.

この假説を分説すると、

(一) 變量(E)は多數個(n個)の獨立なる變量(x_i)に依存する。卽ちEはx_iの函數である、($i=1, 2, \cdots n$)。

(二) x_iはある限界内に於て變動する。

(三) (1) x_iはすべて各別の函數形を有する。

(2) その函數形は a law of error でよく the law of error (正規法則) であるを要しない。

(3) x_iの函數形は同一なるを要しない。

卽ちこの假説によると、觀測法に於ける誤差は、これを多數の獨立原因によつておこる小さな誤差の集りと見做すことになる。この場合Eはx_iの和と見るのである。エッヂワースはこの場合を Glaisher の語を引き説明して[6]

「あらゆる觀測に於て、充分注意を拂つて、もはや大きな誤差を生じない場合には、その正確度は、終局には獨立原因に歸する多くの事情によつて影響を受ける。卽ち觀測者の眼、一般に彼の生理的條件の狀態、大氣の狀態、機具の各部分の狀態等は、すべて現實の誤差を形成するが、これらは明らかに多數の原因に依存するのである。」

さて彼は、この假説のもとに數學的に誤差法則を導いたのはラプラスであるが、これを現實の事象に適用したのは、實にケトレーであつたと述べてゐる。[7]

右の假説が集團的研究の場合に適用される例として、次にシャリーアの説明を引用しよう。[8]

「例へばこゝに一團の人々の身長を測定すると考へよう。若しこの一團の人々が全く同一の先祖から全く同樣に生れ出たもので、同一の氣候の土地に育ち、同一の運動をし、同一の食物を食ひ、全く同一の教育を受ける等、

6) Edgeworth, ibid., § 118.
7) Edgeworth, ibid., § 101.
8) Charlier, C.V.L., a. a. O., S. 59.
成實淸松、數理統計學、(岩波講座、數學) 43頁、の譯文に依る。

その他身長に影響を及ぼす一切の條件が完全に同一であるならば、同一の原因からは同一の結果が生ずることが眞なる限り、この一團の人々の身長は完全に同一なりとの結論に到達する。

故に若しそこに祖先からの遺傳に多少の差違があり、育つた土地の氣候、食物、教育其の他環境上に幾分の相違があるならば、身長上にそれに相當する差違の生ずる事は當然の事柄である。若し是等の諸原因を身長に關する基本誤差（Elementarfehler）の諸原因とするならば、夫等は頗る多數に分解してそれらを總て相互間には獨立であると考へなければならぬ。」

以上の如くにして、われ〳〵は觀測法と統計的方法とに於て、誤差に關する假説を二通り得た。一はガウスの偶然誤差の法則であり、他はラプラス・ケトレーの獨立原因の假説或ひは基本誤差の假説と呼ばれるものである。エッヂワースに於ては後者を取るのであるが、何故に然るのであらうか。この點について彼は特に理由を擧げて説明してゐない。思ふに、觀測法の偶然誤差に關する限りに於ては、ガウスの假説は充分あてはまるであらう。しかしながらこれを直ちに同種多數の個體觀測の場合に適用し得るであらうか。これを主張するのは獨斷と云はねばならぬ。[9] 次にラプラス流の考へ方をみる。所謂「統計的研究」に於て、其の「同種」(Same species) の個體とは何を意味するのであらうか。同種の個體の集團を作り、これを一の集團性に於てとらへるのが「統計的研究」の目標であるが、先づ同種の意義を考察する必要がある。そこで、ケトレーをはじめエッヂワースに於ては、恐らくは同種の意義を、その集團性が獨立原因の假説を滿足する如き、個體の集團と解したのであらう。この限りに於て獨立原因の假説は、廣く自然科學並びに社會科學の領域に於ける集團的研究の基本的假説と見做し得るであらう。

9) Fisher, A., ibid., p. 149.

更にガウスの假説に於ては、その誤差法則は單に正規的なものに止まるに反し、[10] 獨立原因の假説を用ひるならば、ガウスの正規法則は單に第一次近似の誤差法則たるに過ぎないで、更に一般的な誤差法則、所謂歪める曲線 (Skew curve) が本質的なりとの結論に達するのである。[11]

以上に於て、集團的研究はこれを觀測法との關聯に於て問題として來た。從つて集團性は常に量的のものに限られ、解析的量的系列のみが考察されて來た。

さて上述の場合には獨立原因の假説はあくまで假想的・內部的のものであつたが、之に反して實際に獨立原因から誤差の分布を問題にし得る場合がある。即ちそれは games of chance の場合に於てみられるのである。[12] この場合前の變量 x_i の確率函數は極めて簡單な形、即ちラプラスの語を以てせばすべての場合に對する都合よき場合の割合の數が先驗的に與へられ、E は x_i の總和として發現せしめ得るのである。

「誤差法則の生成が最も明確に說明せられるのは、最も簡單なゲーム、即ち二つの異種のものから選出を行ふ場合に於てゞある。表が出るか裏が出るか、ハートが出るか他種のが出るか、或は一般に成功か失敗か (Success or failure) といふ場合で、成功する確率を p、失敗する確率を q とすると、$p+q=1$ である。今 n 回の試行 (Trial) を行ふとき、かゝる成功の總數は n 個の獨立的に變動する要素―それらは各々相對度數 q か p を以て、0又は1の値を取るものとする―から作られた一の集合量と考へ得る。この集合の各値の度數は $(q+p)^n$ の展開式に於ける各對應項によつて與へられるのであり、著名の定理によつてこの項は近似的に $\frac{1}{\sqrt{\pi 2npq}}e^{-\nu^2/2npq}$ に等しくなる、こゝに ν はその項と np (又は np に近い整數) との差たる整數値を表はす。但し ν は $\sqrt{n}$ の order を有つか又はそ

10) 小平吉男、計算法及び計算器械、第五章最小二乘法、參照。
11) Edgeworth, ibid., § 158.
Edgeworth は The Law of Error (Cambridge Philosophical Transaction Vol. XX), 1905. 及び The Generalized Law of Error or Law of Great Numbers (Journal of the Royal Statistical Society, Vol. 69), 1906. に於てこの問題を論じてゐる。

れよりも小なるものとする。」[13)]

これは即ちベルヌーイの系列の場合であるが、これを例につき述ぶれば[14)]

（一）こゝに一組の札があり、黒札m枚、赤枚n枚よりなる。

（二）この一組よりs回取出しを行ふ、(s individual trials)[15)] 但し毎回取出した札は元へもどす。

（三）s回の取出しにより黒札m_i枚を得る、かゝる操作をN度繰返す。(N sample sets)[16)]

（四）$m_1, m_2, m_3, \dots\dots m_N$

この（四）がベルヌーイの系列であり、前の引用文にあてはめれば、黒札の出るのを成功とみ、赤札の出るのを失敗とみることにより、$p=\frac{m}{m+n}$, $q=\frac{n}{m+n}$ $(p+q=1)$, 而してm_i'sが成功の度數を與へる種々な値となる。$(i=1, 2, \dots\dots N)$

更に本例を獨立原因の假說と對比するに、この場合x_iの變動狀態は豫め與へられ、a law of error は$x_i=p, q$でその度數は夫々1、0である。更にx_iの函數形は全く同一となる。そしてEはx_iの和として與へられる。

以上は所謂要素が「二項的」(Binomial) なる場合で簡單であるが、これが進んで要素の度數函數が複雜となると、要素の複合たる變量の誤差法則を導くことは困難となる。[17)]

右の games of chance の場合は、その誤差法則は要素の誤差法則から先驗的に組合せ得るもので、エッヂワースはレキシスの語を借り、combinational case と言ひ、これまでの場合を physical case として區別してゐる。[18)] 前者は間接的、後者は直接的とも言はれる。[19)]

12) Edgeworth, ibid., § 102.
13) Edgeworth, ibid., § 103.
14) Charlier, a. a. O., S. 25. に依る。
15) 16) Fisher, A., ibid., p. 117.
17) Edgeworth, ibid., § 104.
18) Edgeworth, Methods of Statistics, p. 199.

次に games of chance の場合は先づベルヌーイ等の系列と結びつく。從つてこの場合、獨立原因の假說より出た誤差法則は解析的質的系列と結びつくことゝなる。

なほ前例に於て $p=q=1/2$, $(m=n)$ なる場合にはその誤差法則は正規的となるが、p、q の値が相等しからずして相當差があるときには正規曲線はあてはまらなくなり、一般化した誤差法則（歪める曲線）の考察を必要するに到るのである。[20]

四　誤差法則の實在性

既に述べたやうに、今吾々の考察してゐる誤差法則は、現實にある度數分布の法則ではなく、一應これから離れて、先づ現實の度數分布曲線の根基をなす誤差の性質、誤差の構成を問題にし、獨立原因の假說によつて理想的數學的誤差法則を建設したのであつた。しかも同種個體の多數觀察して得たる系列を中心とするが故に、觀測法の場合が關聯されるし、一方又 games of chance がこれに包含されて研究された。從つて誤差の假說はこれを反映し、平均は相加平均を、誤差は構成因子の値と平均との差を取ることゝなる。即ち基準はどこまでも絕對數量をとるのであつて、相對數は一般的には問題にされず、たゞ直ちに絕對數の問題に歸し得る場合に限られるのである。從つて當然假說は加法・減法を基準として構成されてゐるのである。

さて誤差法則の實在性を論ずるに當り、先づ區別すべき二つの點を明らかにしよう。一は本來誤差法則の成立すべしといふ理論的根據のある場合であり、他は現實の度數分布曲線が正規曲線或ひはそれに近い傾向を有する

Edgeworth, "Probability", § 120.
19) Fisher, A., ibid., p. 170.
20) Edgeworth, Toe Law of Error, (Camb. Phil. Trans. Vol. XX.), 1905, p. 57.

曲線とみられることから、逆にその場合について、理想的には誤差法則が成立するのではないかと思はれる場合である。

前者は games of chance に於て見らるゝ例であり、現實の度數分布が理論的誤差法則と喰ひ違ひを生ずるのは全く偶然的で、逆に言へば、誤差法則の標本 (Sample) として現實の度數分布があらはれてゐるのである。然るに後者は、實は誤差法則の本來の問題である。この場合に於ても吾々は誤差法則の生成を、全く形式的・數學的に取扱つたに過ぎないのであるから、具體的・現實的地盤についてよく考察する必要がある。更らにかゝる一應基本誤差の假說を想定し得る場合ではなく、現實的に何等その根據を見出し得ざるに於ては、たとへその分布が正規的傾向を示すとしても、直ちに誤差法則の實在の例とはなし得ない。逆に現實の度數分布の正規的傾向よりして、その集團がはたして同種個體の多數よりなるとみられうるや否や、如何なる性質を有するや、更に問題としてゐる集團性がはたして何を意味するかを充分に吟味する必要を生ずるのである。

エッヂワースは、然らば、誤差法則の實在的基礎として如何なる場合を擧げ、又右の問題を如何に解したであらうか。

(一) 本來の誤差[1]——これが基本であり、彼の所説は既に述べた通りである。

(二) 人の身長、其の他人體測定の場合[2]——エッヂワースは誤差の場合につゞいて、「種々なる統計」に於て獨立原因の行はれるであらうといふ場合があることを述べるが、彼の「統計」は單に測定値系列(同種個體の觀測により得た)といふ意味に止まり、その集團の性質には觸れてゐない。(二)についてはケトレー其他の學者の研究を指摘してゐる。

1) Edgeworth, "Probability", § 118.
2) Edgeworth, ibid., § 118.

（三）「種々なる階級に支拂はれる賃銀の集團」[3]―社會現象が正規分布法則に從ふ傾向のある例としてボーレーの考察を指摘する。しかしながらこれが理論的誤差法則に從ふや否やは、實は階級、賃銀の意義を明確にするを俟つてはじめて決定せられるもので、それまでは現實に正規的傾向を有するといふ記述的のものにすぎないであらう。

（四）「全人口に對する出生兒又は死亡者の割合」[4]―彼は系列の各項が比率である場合として、先づこの一般的出生率又は死亡率とも云ふべきものをとり、これを games of chance と對比してゐる。しかしながらかくの如く理論の適用を考へるに際しては、幾多の假定を伴ふのである。卽ちN年にわたり毎年の人口（正確にはある一時點に於ける靜態人口）を s_1、s_2…s_N 人とし、出生者數を順次 m_1、m_2…m_N 人とする。この時 s_i $(i=1,2,\ldots N)$ は略々等しいとみて人口は定常的 (stationary) に s 人であるとする。そして出産現象は全く games of chance に於ける都合よき場合 (favourable case) と同様に見做し得るとする、卽ち progressive charactrr[5] を伴はないものとすると、$\frac{s}{s_1}m_1$, $\frac{s}{s_2}m_2$, $\frac{s}{s_3}m_3$, …, $\frac{s}{s_N}m_N$ はこれをベルヌーイの系列と見做し得ることゝなる。[6]

死亡率については一般的のものゝほか、ボルトキウィッチによつて見出された場合をあげて、職業別による死亡率、年齢別にみたそれを指摘してゐる。[7]

（五）「全出生兒に對する男兒出生の割合」及び「出生に於ける男女兒の割合」[9]―前者に對しては（四）に於ける考察がそのまゝあてはまるが、後者は決してさうではない。彼はこの場合を原因の複合から明らかとなす[10]が如くであるが、思ふに獨立原因の假説を滿足するとは直ちに斷じ得ない。卽ちわれ〳〵の誤差法則は相對數を取扱ふ場合に於ても分母を同一とみなし得る場合、卽ち絶對數に歸し得ることを前提として來たからである。

3) Edgeworth, ibid., § 118.
4) Edgeworth, ibid., § 120.
5) Edgeworth, The Law of Error, (Palgrave Dictionary), 1925, p. 752.
6) Charlier, a. a. O., S. 46. 參照。
7) Edgeworth, "Probability", § 120.
8) Edgeworth, ibid., § 120.

五　むすび

以上に於いて、わたくしはエッヂワースが誤差法則の出發點を如何に取扱つたかにつき考察を試みた。統計學を規定して「平均の學問」乃至「集團現象の學問」となす彼に於ては、統計的研究―集團的研究がその中心課題となつたのであるが、こゝに於ては常に平均と誤差分布が問題となる。從つて現實の度數分布曲線(法則)から數學的・形式的に理想的誤差法則を構成するに當つては、平均と誤差に關して假說を設けなければならぬ。われ〱は純解析的量的系列に就ては、これを觀測法に於ける測定値系列と對比して論じたが、その類推の根據はこれを同種(Same species)に求めた。そしてその數學的表現を獨立原因の假說―基本誤差の假說と考へたのである。この場合、量的な系列を考へて居る故、その平均及誤差の意義は加・減法の支配をうけてゐる。次に純解析的質的系列については、これを games of chance との關聯に於いて考察した。而してこの場合も獨立原因の假說の適用を受け得るのである。以上は純解析的集團を基準として考察したのであるが、かゝる集團をつくり得る場合は、現實の集團的研究に於ては少いであらう。特に吾々の統計解析法の問題としてみるときに於て然りである。[1] そしてこの集團―社會的集團・大量―の性質を吟味するのが實は吾々の重要なる問題となる。

次に右の誤差法則は測定値集團(同一物多數回・同種個體多數)に妥當すべきものとして生成されたものである。從つて比率を各項とする系列に於ては、直ちにこれを適用するを得ない。然るに統計學の問題としては統計的比率更に指數[2]の考察が重要視される。これらはその形式的並びに實質的意味の理解を俟つてはじめて、その平均並びに誤差法則が論ぜられるであらう。更に進んで、これがわれ〱の問題とした誤差法則と一致するや否や、一致しないとしても、兩者の間にある必然的關聯が存するや否や等の考察は、すべて今後に委ねられた課題である。

9) Edgeworth, ibid., § 120.
10) Edgeworth, Methods of Statistics, p. 193.
1) 蜷川虎三、統計學概論、113頁。
2) 蜷川虎三、統計學概論、299頁―301頁。
Edgeworth, "Probability," § 121.